第2講　式と証明

§1 恒等式

要点整理 と 公式

要点1 恒等式と方程式

「恒等式」… 含まれている文字にどのような値を代入しても成り立つ等式

「方程式」… 含まれている文字にある特定な値を代入したときだけ成り立つ等式

(ex)　$(x+3)(x-2)=x^2+x-6$ …「　　　　」

$(x+3)(x-2)=0$　　　　…「　　　　」

展開や因数分解の公式など，式の変形によって両辺が同じ式になる等式は，すべて恒等式である。

a，b，cを定数とするとき，

等式 $ax^2+bx+c=3x^2+4x+5$ が x についての恒等式であるための条件を考える。

この等式が x についての恒等式ならば，x にどのような値を代入しても成り立つ。

よって，$x=0$，1，-1 を代入すると

$$c=5,\quad a+b+c=12,\quad a-b+c=4$$

が成り立つ。この連立方程式を解くと $a=3$，$b=4$，$c=5$ である。

逆に，$a=3$，$b=4$，$c=5$ のとき，明らかにこの等式は x についての恒等式である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，次のことが成り立つ。

■ 恒等式の性質

整式 $P(x)$ と $Q(x)$ について

$P(x)=Q(x)$ が x についての恒等式

$\iff$ $P(x)$ と $Q(x)$ の同じ次数の項の係数が一致

特に，x の2次式について

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式

$\iff$ $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式 $\iff$ $a=0$，$b=0$，$c=0$

※一般に，$P(x)$ と $Q(x)$ が x についての n 次(以下)の整式であるとき，等式 $P(x)=Q(x)$ が $n+1$ 個の異なる x の値に対して成り立つならば，この等式は x についての恒等式である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の等式が，x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$$2x^2 - 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

Point Pickup

恒等式の係数を決定する

$\Longrightarrow$　同類項を整理し，両辺の同じ次数の項の係数を＝で結ぶ。

$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x についての恒等式

$\Longleftrightarrow$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 等式の証明

要点整理 と 公式

要点2 等式の証明

等式 $A = B$ を「証明する」とは，この等式が「 恒等式 」であることを示すことである。

以下のいずれかの方法が代表的な解法である。

■ 等式 $A = B$ の証明

① A を変形して B を導く，または B を変形して A を導く。

② A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。

③ $A - B = 0$ であることを導く。

(ex) 等式 $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ を証明する。

①の方法を用いると

(右辺) $= a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 =$ (左辺)

よって，$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

要点3 条件つきの等式の証明

ここでは，ある条件のもとでつねに成り立つ等式を証明する。

(ex) $a + b = 2$ のとき，等式 $a^2 + 2b = b^2 + 2a$ を証明する。

$a + b = 2$ のとき $b =$

このとき

(左辺) $= a^2 + 2(2 - a) = a^2 + 4 - 2a = a^2 - 2a + 4$

(右辺) $= (2 - a)^2 + 2a = 4 - 4a + a^2 + 2a = a^2 - 2a + 4$

よって，$a^2 + 2b = b^2 + 2a$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点4 比例式

$a:b=c:d$ のとき $\dfrac{a}{b}=$　　　である。

このように，比の値が等しいことを示す等式を「比例式」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の等式を証明せよ。

(1)　$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

(2)　$a + b + c = 0$ のとき，$a^2 + b^2 = c^2 - 2ab$

(3)　$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

Point Pickup

等式 $A = B$ の証明

以下のいずれかの方法で証明する。

① A を変形すると B になる　または　B を変形すると A になる

② A，B それぞれを変形すると同じ式になる

③ $A - B$ を計算して 0 になる $(A - B = 0)$

等式の証明（条件式あり）

条件式を用いて，ある文字を消去して進める。

条件式が比例式の場合は，（比例式）　　　　とおくとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 不等式の証明

要点整理 と 公式

要点5 実数の大小関係

2 つの実数 a，b について，a　　b，a　　b，a　　b のいずれか 1 つの関係だけが成り立つ。

また，実数 a，b，c の大小関係について，次の性質が成り立つ。

■ 実数の大小関係

① $a > b,\ b > c \Longrightarrow a > c$

② $a > b \Longrightarrow a + c > b + c,\quad a - c > b - c$

③ $a > b,\ c > 0 \Longrightarrow ac > bc,\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

$a > b,\ c < 0 \Longrightarrow ac < bc,\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

②より，$a > b \Longrightarrow a - b > b - b$　つまり $a - b > 0$

$a - b > 0 \Longrightarrow a - b + b > 0 + b$　つまり $a > b$

よって　$a > b \Longleftrightarrow a - b > 0$　が成り立つ。

この性質を，不等式の証明に用いることができる。

■ 不等式 $A > B$ の証明

$\Longrightarrow$ $A - B > 0$ を証明する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点6 実数の平方

実数の大小関係から　$a > 0 \Longrightarrow a^2 > 0$　　$a < 0 \Longrightarrow a^2 > 0$　がいえる。

また，$a = 0 \Longrightarrow a^2 = 0$　である。

よって，実数の平方について，次のことがいえる。

■ 実数の平方の性質

実数 a について，$a^2 \geqq 0$　等号が成り立つのは $a = 0$ のとき

※ $a > 0$，$b > 0$ のとき，a^2 と b^2 の大小について　$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

よって，$a^2 - b^2$ と $a - b$ の符号は一致。

つまり，$a^2 - b^2 > 0 \Longleftrightarrow a - b > 0$　より　$a^2 > b^2 \Longleftrightarrow a > b$

$a^2 - b^2 = 0 \Longleftrightarrow a - b = 0$　より　$a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = b$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

(1)　$a>1$, $b>1$ のとき，不等式 $ab+1>a+b$ を証明せよ。

(2)　x, y が実数のとき，不等式 $x^2+y^2 \geqq 2xy$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(3)　$a>0$ のとき，不等式 $a+2>2\sqrt{a+1}$ を証明せよ。

Point Pickup

不等式 $A>B$ の証明

$\Longrightarrow$　$A-B$　　　を示す。つまり $A-B$ を計算して，それが　　であることを示す。

主に次の性質が用いられる。

・（正）＋（正）＝（正）　　（正）×（正）＝（正）　　（負）×（負）＝（正）

・実数 a, b について

　$a^2 \geqq 0$　（等号成立は　$a=0$）　　$a^2+b^2 \geqq 0$　（等号成立は $a=b=0$）

・$a>0$, $b>0$ のとき

　$a^2>b^2 \iff a>b$　　$a^2 \geqq b^2 \iff a \geqq b$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 相加平均と相乗平均

要点整理 と 公式

要点7 相加平均と相乗平均の大小関係

2つの実数 a, b について，　　　　を a と b の「相加平均」という。

また，$a>0$, $b>0$ のとき，　　　　を a と b の「相乗平均」という。

(ex) 2数7と28について

相加平均は　　　　　　　　　　相乗平均は

相加平均と相乗平均には，次の大小関係が成り立つ。

■ **相加平均と相乗平均の大小関係**

$a>0$, $b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ …（相加平均）≧（相乗平均）

等号が成り立つのは $a=b$ のとき

$a>0$, $b>0$ のとき

$(a+b)^2-(2\sqrt{ab})^2=a^2+2ab+b^2-4ab=a^2-2ab+b^2$

$=$

よって，$(a+b)^2-(2\sqrt{ab})^2 \geqq 0$　つまり　$(a+b)^2 \geqq (2\sqrt{ab})^2$

$a+b>0$, $2\sqrt{ab}>0$　より　$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$

したがって，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは　　　　　つまり　$a=b$　のとき

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

$x>0$ のとき，不等式 $x+\dfrac{4}{x}\geqq 4$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

Point Pickup

（相加平均）≧（相乗平均）

$a>0$，$b>0$ のとき（相加平均）≧（相乗平均），つまり

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

が成り立つ。等号成立は $a=b$ のとき。

これを用いて，

「積が一定である２数の和」の形を含む不等式を証明することができる。

また，この不等式は　　　　　　　　　　の形で用いられることも多い。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　確認テスト

1　等式 $2x^2+3x+4=a(x+2)^2+b(x+2)+c$ が x についての恒等式となるのは

$a=$ [ア]，$b=-$ [イ]，$c=$ [ウ] のときである。

2　$a+b=1$ のとき，等式 $a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$ を証明する。

$a+b=1$ より，$b=1-a$

このとき，(左辺) = [エ] (a^2-a+ [オ])，(右辺) = [カ] (a^2-a+ [キ]) より

$a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$

3　$a>b$ のとき，不等式 $4a-3b>2a-b$ を証明する。

$(4a-3b)-(2a-b)=$ [ク] $(a-b)$

$a>b$ より [ク] $(a-b)>0$

よって $(4a-3b)-(2a-b)>0$

したがって　$4a-3b>2a-b$

4　$a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$ を証明する。

$a>0$，$\dfrac{9}{a}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均)から

$$a+\frac{9}{a}\geqq \text{[ケ]}\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}}=\text{[ケ]}\cdot\text{[コ]}=\text{[サ]}$$

よって $a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$

等号が成り立つのは $a=\dfrac{9}{a}$ のときで，$a>0$ より $a=$ [シ] のときである。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　式と証明

1

等式の右辺を x について整理すると

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c=ax^2-2ax+a+bx-b+c$$

$$=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)$$

よって，等式は次のようになる。

$$2x^2-1=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)$$

これが x についての恒等式となるのは

$$a=2,\ -2a+b=0,\ a-b+c=-1$$

つまり　$a=2,\ b=4,\ c=1$　のとき

2

(1)　(右辺) $=x^4+x^3+x^2+x-x^3-x^2-x-1=x^4-1=$ (左辺)

よって，$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

(2)　$a+b+c=0$　より　$a=-b-c$

このとき

(左辺) $=(-b-c)^2+b^2=b^2+2bc+c^2+b^2=2b^2+2bc+c^2$

(右辺) $=c^2-2(-b-c)b=c^2+2b^2+2bc=2b^2+2bc+c^2$

よって　　$a+b+c=0$ のとき，$a^2+b^2=c^2-2ab$

(別解)

(左辺) $-$ (右辺) $=a^2+b^2-(c^2-2ab)=a^2+2ab+b^2-c^2=(a+b)^2-c^2$

$$=(a+b+c)(a+b-c)=0$$

よって　　$a+b+c=0$ のとき，$a^2+b^2=c^2-2ab$

(3)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$　とおくと，$a=bk,\ c=dk$

このとき

(左辺) $=\dfrac{bk+dk}{b+d}=\dfrac{k(b+d)}{b+d}=k$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

（右辺）$= \dfrac{bk-dk}{b-d} = \dfrac{k(b-d)}{b-d} = k$

よって　$\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

3

（1）$(ab+1)-(a+b) = ab+1-a-b = (b-1)a-(b-1) = (b-1)(a-1)$

$a>1$，$b>1$　より　$a-1>0$，$b-1>0$

よって　$(b-1)(a-1)>0$

したがって，$ab+1>a+b$

（2）$(x^2+y^2)-2xy = x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2 \geqq 0$

よって $x^2+y^2 \geqq 2xy$

等号が成り立つのは　$x-y=0$　つまり $x=y$　のとき

（3）$(a+2)^2-(2\sqrt{a+1})^2 = a^2+4a+4-4(a+1) = a^2>0$　（$a>0$より）

よって，$(a+2)^2>(2\sqrt{a+1})^2$

$a>0$　より　$a+2>0$，$2\sqrt{a+1}>0$

したがって，$a+2>2\sqrt{a+1}$

4

$x>0$，$\dfrac{4}{x}>0$ より，（相加平均）≧（相乗平均）から

$x+\dfrac{4}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}} = 2\cdot2 = 4$

よって　$x+\dfrac{4}{x} \geqq 4$

等号が成り立つのは　$x=\dfrac{4}{x}$　つまり　$x^2=4$　のときで，

$x>0$　より $x=2$　のときである。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　確認テスト

1 等式 $2x^2+3x+4=a(x+2)^2+b(x+2)+c$ が x についての恒等式となるのは

$a=$ [ア]，$b=-$ [イ]，$c=$ [ウ] のときである。

2 $a+b=1$ のとき，等式 $a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$ を証明する。

$a+b=1$ より，$b=1-a$

このとき，(左辺) $=$ [エ] $(a^2-a+$ [オ] $)$，(右辺) $=$ [カ] $(a^2-a+$ [キ] $)$ より

$a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$

3 $a>b$ のとき，不等式 $4a-3b>2a-b$ を証明する。

$(4a-3b)-(2a-b)=$ [ク] $(a-b)$

$a>b$ より [ク] $(a-b)>0$

よって $(4a-3b)-(2a-b)>0$

したがって　$4a-3b>2a-b$

4 $a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$ を証明する。

$a>0$，$\dfrac{9}{a}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均)から

$$a+\frac{9}{a}\geqq \boxed{ケ}\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}}=\boxed{ケ}\cdot\boxed{コ}=\boxed{サ}$$

よって $a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$

等号が成り立つのは $a=\dfrac{9}{a}$ のときで，$a>0$ より $a=$ [シ] のときである。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1	ア　2	イ　5	ウ　6	
2	エ　2	オ　1	カ　2	キ　1
3	ク　2			
4	ケ　2	コ　3	サ　6	シ　3

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。